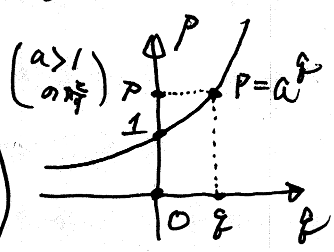
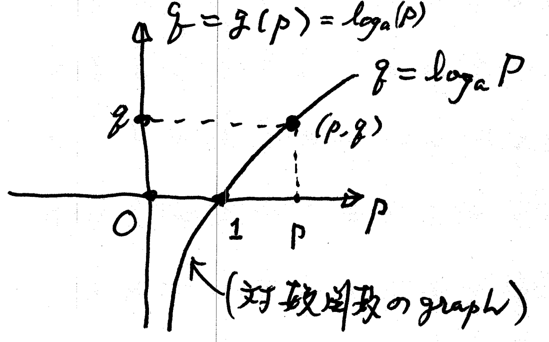
11.01 ① 任意の正の数 p に対して、 $a^q=p$ を満たす q がただ1つ定まる。
逆関数が一意的に定義できる事になる。この場合、この q の値を
$q=\log_a p$ と書く。(約束だ!)

この場合、 (a を 底 (てい) と呼ぶ。
q は a を底とする p の 対数 と呼ぶ。
また、 p は この対数の 真数 と呼ぶ。)



$p=f(q)=a^q$ と書く

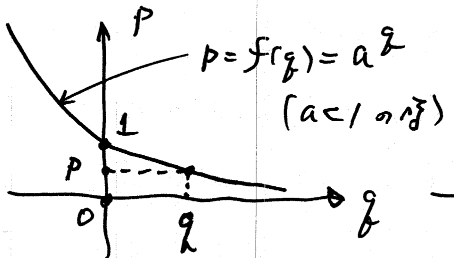
真数は必ず常に正の数となる。← (あくまで、実数領域での話!)

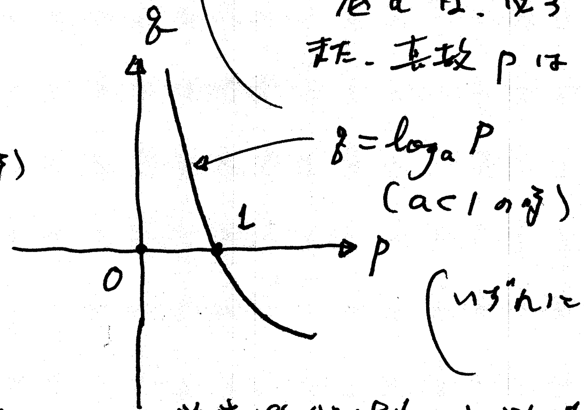


$$\boxed{\begin{array}{l} a>0,\ a\neq 1 \text{ の時。} \\ a^q=p \iff q=\log_a p \end{array}}$$

(実数領域で限定された場合は、
対数 $\log_a p$ と書くと、
底 a は必ず $a>0,\ a\neq 1$ とする。
また、真数 p は必ず $p>0$ とする。)

$a<1$ でも良い。





$$\boxed{p=a^q>0}$$

(いずれにせよ、$p>0$ で定義されている。)

② $e^{jx}=\cos x+j\sin x$ より複素数領域へ対数関数 $y=\log_e(x)$ も拡張する事ができる!! $x=a+jb$ の場合、 $x=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+j\sin\theta)=Ae^{\theta j}$ と書ける。ここで $A=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta=\frac{a}{A}$, $\sin\theta=\frac{b}{A}$ である。

$x=Ae^{\theta j}$ より $\left(\frac{x}{A}\right)=e^{\theta j}$ より $(\theta j)=\log_e\left(\frac{x}{A}\right)=\log_e(\cos\theta+j\sin\theta)$

(底が e の時の対数)=(自然対数) $\ln(z)=\log_e(z)$ のこと。 $\theta=\frac{\pi}{2}$ の時、 $\log_e(j)=\frac{\pi}{2}j$ となる!!

③ $f(x)=e^x$ の逆関数は $g(x)=\log_e(x)$ である。 $f(g(x))=x$ となる。

すなわち、 $f(g(x))=e^{\log_e(x)}=x$ となる。

($(y)=(A)/(B)$ の時、
$(A)=(y)(B)$)

すなわち、 $(x)=(A)(B)$ の時、

$$e^{\log_e(x)}=\left(e^{\log_e(A)}\right)\left(e^{\log_e(B)}\right)=e^{\log_e(A)+\log_e(B)}$$

$\log_e(x)=\log_e(A)+\log_e(B)=\log_e(AB)$ となる。

同様に $\log_e(A)=\log_e(y)+\log_e(B)=\log_e(yB)=\log(A)$
$\log_e(y)=\log_e(A/B)=\log_e(A)-\log_e(B)$ となる!

④ $\left\{\begin{array}{l}\log_e(AB) = \log_e(A) + \log_e(B) \\ \log_e(A/B) = \log_e(A) - \log_e(B)\end{array}\right\}$ となる。 $\left(\begin{array}{l} X = a+bj = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta + j\sin\theta) \\ A = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta = \dfrac{a}{A},\ \sin\theta = \dfrac{b}{A}, \end{array}\right)$

$$\log_e(a+bj) = \log_e \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta + j\sin\theta)$$

Remember $\left(\begin{array}{l}\cos\theta = \cos(\theta+2n\pi) \\ \sin\theta = \sin(\theta+2n\pi)\end{array}\right)$

$$= \log_e\sqrt{a^2+b^2} + \log_e(\cos\theta + j\sin\theta)$$

(θ は $\theta+2n\pi$ でもOK)

$$= \log_e(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} + \log_e(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}\log_e(a^2+b^2) + j\theta$$

$$\log_e(a+bj) = \frac{1}{2}\log_e(a^2+b^2) + (j)(\theta + 2n\pi)$$ となる!!

$(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

$a=0,\ b=1$ の時 $a^2+b^2=1$; $\sqrt{1}=1$; $\left(\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$

$$\log_e(j) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)j$$ となる!!

($q = \log_a P$ に於いて、真数 P が複素数で、$P = a+jb$ の時。
q は a を底とする p の対数と言うが、その値は一意的には
決定されず、無限 $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 個数ある。)

これは $y = x^2 = f(x)$ の関数には、$g_1(x) = \sqrt{x}$ と $g_2(x) = -\sqrt{x}$ の
2つの逆関数が考えられるのと同様に、一般に逆関数は
複数個存在する場合もある事になる。

⑤ $\left\{\begin{array}{ll} x = \log_a M & (M = a^x) \\ y = \log_a N & (N = a^y)\end{array}\right.$ とすると、 $\left\{\begin{array}{l} MN = a^x a^y = a^{x+y} \\ \log_a(MN) = x+y = \log_a(M) + \log_a(N)\end{array}\right.$

また割算の時は、$\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow \log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = x-y = \log_a(M) - \log_a(N)$
となる。

$M = a^x$ より $M^r = (a^x)^r = a^{rx}$

$$\log_a(M^r) = rx = r\log_a M \qquad \log_a(M^r) = r\log_a M$$

$(M = a^x)$

即ち、
$$\boxed{\begin{array}{l}\log_a(MN) = \log_a(M) + \log_a(N) \\ \log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N) \\ \log_a(M^r) = r\log_a(M)\end{array}}$$

⑦ $\left(\begin{array}{l} 2 = 4^x \\ 2 = 2^{2x} \\ 2x = 1 \\ x = \frac{1}{2}\end{array}\right)$ ⑥ $\left(\begin{array}{l} 9 = 3^2 \\ \log_3 9 = \log_3 3^2 \\ = 2\log_3 3 \\ = 2\end{array}\right)$

⑥ $(y=9,\ a=3)$ の時 $y = a^x \to 9 = 3^2$, $x = \log_a(y) \Rightarrow 2 = \log_3 9$ となる。

⑦ $(y=2,\ a=4)$ の時 $= a^x \to 2 = 4^{\frac{1}{2}}$ $x = \log_a(y) \Rightarrow \frac{1}{2} = \log_4 2$ となる。

⑧ $x = \log_a(y) \Rightarrow (a=8,\ y=16)$ の時 $x = \log_8 16 \Rightarrow 8^x = 16 = 2^{3x} = 2^4 \to x = \dfrac{4}{3}$ ←

$\left(x = \log_8 16 = \dfrac{\log_2 16}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \dfrac{4\log_2 2}{3\log_2 2} = \dfrac{4}{3} \leftarrow\right)$

11.2 ① 底が $a=10$ の時. $\frac{1}{3}\log(8)+\log(3/2)-\log(0.3)$ の値は.

$$(8^{\frac{1}{3}})\left(\frac{3}{2}\right)/(0.3) = (2^3)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{10}{3}\right) = (2)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{10}{3}\right) = 10 = (\text{真数}) = p$$

底 $a=10$ も 真数 $p=10$ も 10である. $\log_a P = \log_{10} 10 = 1$ となる.

② 底が $a=3$ の時. $\log_3(32)/\log_3(4) = \log_3(2^5)/\log_3(2^2) = \frac{5\log_3 2}{2\log_3 2} = \frac{5}{2}$ ←

$$p = \log_3(2) = \frac{\log_e(2)}{\log_e(3)} = \frac{(0.69314718)}{(1.098612289)} = 0.630929752\cdots$$

たしか、この数は消える!!

一般に a と q が与えられて. $p=\log_a(q)$

を求めるには. 数値表(又は電卓)が必要となる!!

(e^x の値も $\sin x$ や $\cos x$ も 同様に数値表や電卓が必要となる...)

11.3 ① $\begin{pmatrix} p=a^q \\ q=\log_a P \end{pmatrix}$ となる. $r=\log_c P = \log_c(a^q)$ ← $(p=c^r=a^q)$

$$= q\log_c(a)$$

$$\log_c P = (\log_a P)(\log_c a) \rightarrow \log_a P = \frac{\log_c P}{\log_c a} = q \text{ となる!!}$$

また. $p=c^r=a^q$ とすると. $r=\log_c P = \frac{\log_a P}{\log_a C} = \frac{q}{\log_a C}$

$q=\log_a P$

$q = r\log_a C$ となる.

② $2^n=10^m$ の時. $c=2, a=10$ として. $m = n\log_{10}2 = n\left(\frac{\log_e 2}{\log_e 10}\right)$ ←

$(2'n = 2^n$ の事!)
(文字が多い時便利!!)

$$K=\frac{m}{n}=\frac{(\log_e 10)}{(\log_e 2)} = \frac{2.302585093}{0.69314718} = 3.321928 \leftarrow$$

$m=1$ の時. $2^n=10$ で $n=\frac{\log_e 10}{\log_e 2} = \frac{\log_2 10}{\log_2 2} = \log_2 10 = 3.321928\cdots$

$n=1$ の時. $10^m=2$ で

$$m=(n)\left(\frac{\log_e 2}{\log_e 10}\right) = (n)\frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(10)} = \log_{10}2 = \frac{1}{\log_2 10}$$

$m=\log_{10}2 = \frac{1}{\log_2 10} = 0.30103\cdots$ となる...

③ $\log_a(b) = \frac{\log_b(b)}{\log_b(a)} = \frac{1}{\log_b(a)}$ 　$(\log_a b)(\log_b a) = 1$. となる

指数関数 e^x の e の値は $e = 2.718281828\cdots = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$

$(\log_e 10 = 2.302585\cdots)$ $z=e^x=10^y$ とすると.

$y=\log_{10}(z)$; $\log_e(z)=x=(y)\log_e 10 = (2.302585\cdots)(y)$

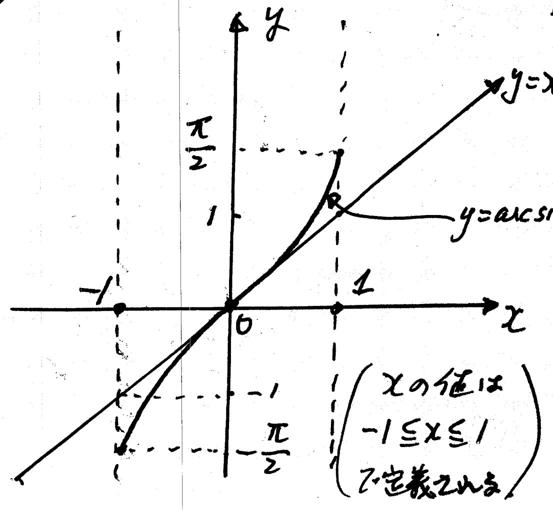
$\log_e(z) = (2.302585\cdots)\log_{10}(z)$ となる.

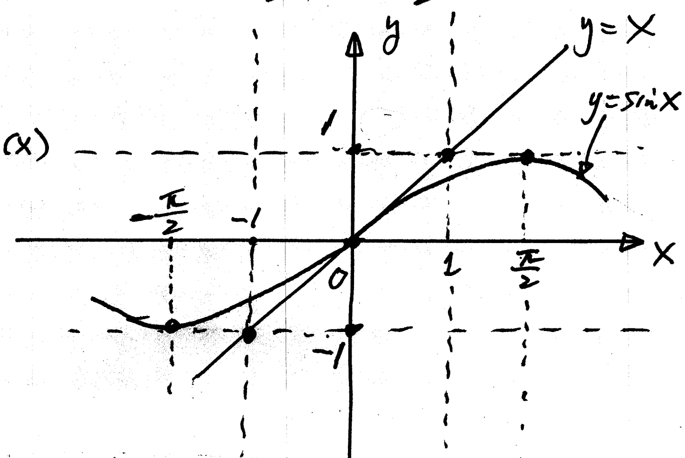
$\log_e(z) = (0.69314717\cdots)\log_2(z)$ でもある....

11.4 ① $y=\log_e x$ と $y=e^x$ の2つのgraphは $y=x$ の直線に関して対称となる。

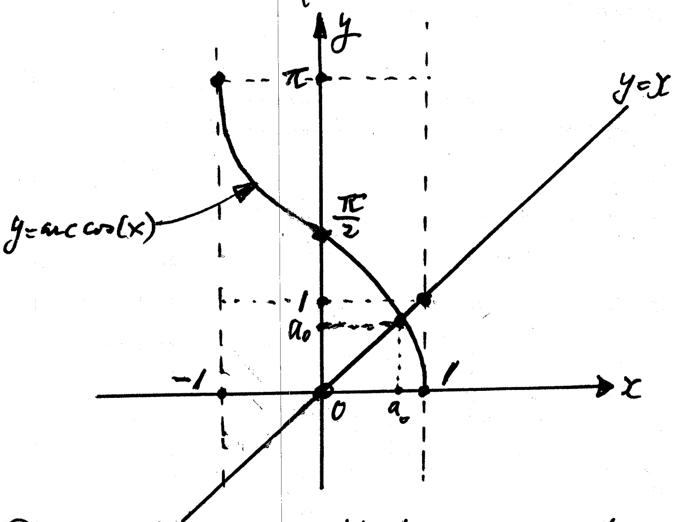
一般に $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が逆関数の関係がある時、この2つのgraphは、直線 $y=x$ に関して対称となる。

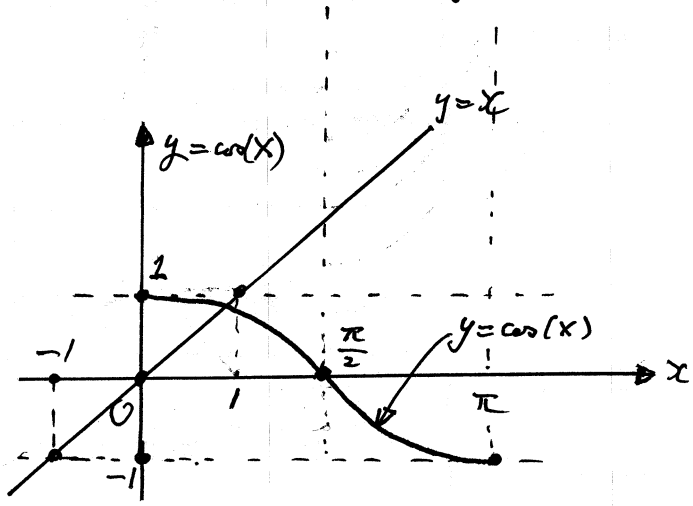
② $y=\sin(x)$ に対して、その逆関数を $y=\arcsin(x)$ で定義する。
（yの値は $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$ で定義する。）





③ $y=\cos(x)$ の逆関数 $y=\arccos(x)$ は $-1\leqq x\leqq 1$ で定義される。$0\leqq y\leqq\pi$ とする。





④ $y=\tan(x)$ の逆関数 $y=\arctan(x)$ は、xは実数全域で定義される。
$-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$ とする。