10.01 $\exp\left(\frac{\pi}{2}j\right) = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j$ → $j^j = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ となる!!

対数関数を使う!!
$\frac{\pi}{2}j = \ln j$ ということになる?!
すなわち、$j\ln j = (j)\left(\frac{\pi}{2}j\right) = -\frac{\pi}{2} = \ln(j^j)$

逆関数の定義
$y=f(x)$ の時 $x=g(y)$
$y=f(g(y))$; $x=g(f(x))$
fはgの逆関数 ; gはfの逆関数

$j^j = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$ 0.20787 95763 50761 90854 69556
19834 97877 00338 77841 63176
96080 75135 88305 54198 77285
48213 97886 00277 86542 60353
40521 ---- となる!!

$\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ はどうしたら正確に計算できるだろうか??

$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} - \frac{4}{9} + \frac{4}{11} - \frac{4}{13} + \cdots$ とのことだが、why? ($\pi = 3.14159265358 9\cdots$)

$e = 2.71828\cdots$ ($e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$ より $e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$)

10.02

$2^0=1$	$2^6=64$		$2^{16}=65536$
$2^1=2$	$2^7=128$	$2^{11}=2048$	$2^{17}=131072$
$2^2=4$	$2^8=256$	$2^{12}=4096$	$2^{18}=262142$
$2^3=8$	$2^9=512$	$2^{13}=8192$	$2^{19}=524284$
$2^4=16$	$2^{10}=1024$	$2^{14}=16384$	$2^{20}=1048568$
$2^5=32$		$2^{15}=32768$	

$2^{10} \approx 1K \approx 1000 = 10^3$
$2^{20} \approx 1M \approx 100\,0000 = 10^6 = 100$万
$2^{30} \approx 1000M = 10\,0000\,0000 = 10$億
$2^{40} \approx (1M)(1M) = 10^{12} = 1$兆 となる!!
(1万$=10^4$; 1億$=10^8$; 1兆$=10^{12}$)

($k = 1000 = 10^3 =$ thousand (千), $M = 1000000 = 10^6 =$ million (100万), $B = 10^9 =$ billion (10億))

10.03 ① 指数法則

$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{(mn)}$
$(ab)^n = (a^n)(b^n)$

$a^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

たとえば、$2^{10} \times 2^{-3} = 2^{10-3} = 2^7 = 128$
$\left(\begin{matrix} 2^{10} = 1024 \\ 2^3 = 8 \end{matrix}\right)\left(\frac{1024}{8} = 128\right)$

$10^{-3} \div 10^{-2} = \frac{10^{-3}}{10^{-2}} = 10^{-3} \times 10^2 = 10^{-3+2} = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$
$10^{-3} = \frac{1}{1000}$; $10^{-2} = \frac{1}{100}$; $10^{-3} \div 10^{-2} = \left(\frac{1}{1000}\right) \div \left(\frac{1}{100}\right) = \frac{10}{1000} = 0.1$ となる。

② $x^2=-3$ の解は $\pm\sqrt{3}$
$\pm\sqrt{3}$ を $x^2=-3$ の平方根という。

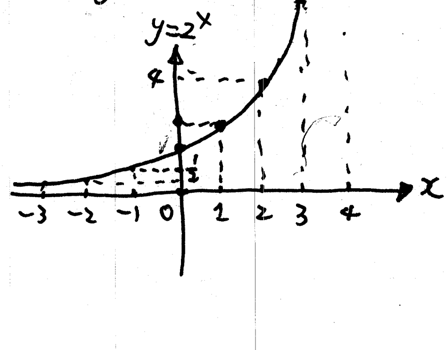
$x^n = a$ の時、x を a のn乗根という。$n=2,3,4,\cdots$ をまとめて、aの累乗根という。

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[(mn)]{a}$;

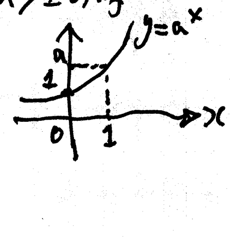
たとえば
$\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
$\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
となる..

③ $y = 2^x$ の graph

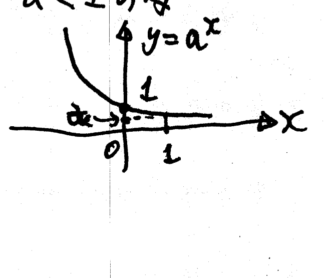
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	$\cdots$



a>1の時



a<1の時



10.04 ① 物体 M が高さ H から落下した時の速度は、

$P=$(位置エネルギー)$=(M)(g)(H)$

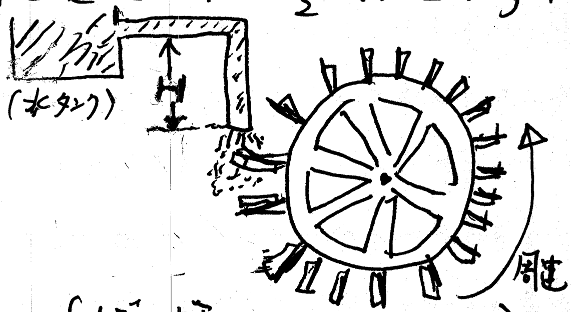
($M=$物体の質量、$g=$(重力加速度)$=9.8\ m/sec^2$、$H=$落下する高さ(meter))

この位置エネルギーが運動エネルギー

$E=\frac{1}{2}MV^2$ となる。

$P=E$ として、$\frac{1}{2}MV^2=MgH$ より $V^2=2gH \rightarrow V=\sqrt{2gH}$ となる。

②



(ノズルから出る力で水車がまわる!!)

(水車の周辺に装備されたバケット(bucket)の周速は、ノズルから出る水に比例する。水車には、回転速度に比例して、回転をさまたげる摩擦力が働くので、比例定数は 1 以下となる。たとえば、0.45 とかになる!!)

(水の理論速度)$=V=\sqrt{2gH}$; (比例定数)$=k=0.45$; $g=9.8\ m/sec^2$; $H=360m$;

(バケットの周速)$=k\sqrt{2gH}=(0.45)\sqrt{(2)(9.8)(360)}=37.8\ m/sec$ となる!!

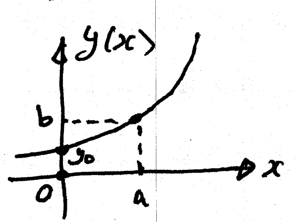
(電卓を使わない事!)

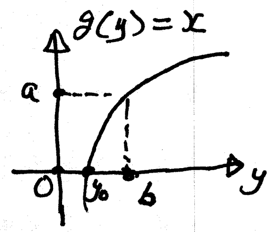
$\sqrt{(2)(9.8)(360)}=\sqrt{(2)^2(49)(36)}=(2)(7)(6)=84$;

$(84)(0.45)=(42)(0.9)=36+1.8=37.8$

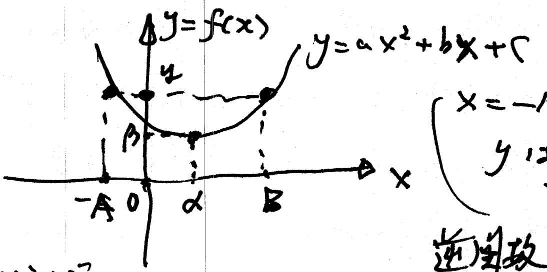
10.05 ① $y=f(x)$ の時、$x=g(y)$ と書ける。

(この時、g を f の逆関数という。また f を g の逆関数という。)



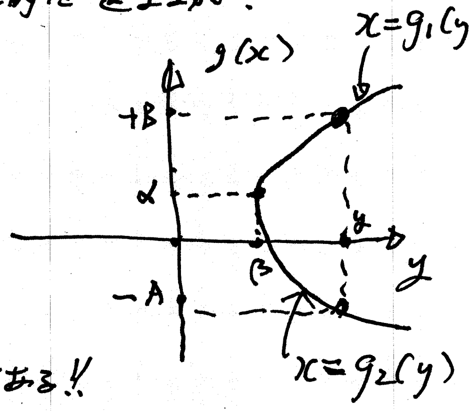


② $y=f(x)$ の関数で、x の値に対して、y は一意的に定まるが、その逆は必ずしもそうではない!!



($x=-A$ と $x=B$ で、y は同じ値になる。)

逆関数 $x=g(y)$ は 2つ定義する必要がある!!



③ たとえば、$y=x^2$ の逆関数は、

$g_1(y)=\sqrt{y}$ と $g_2(y)=-\sqrt{y}$ の 2つがある!

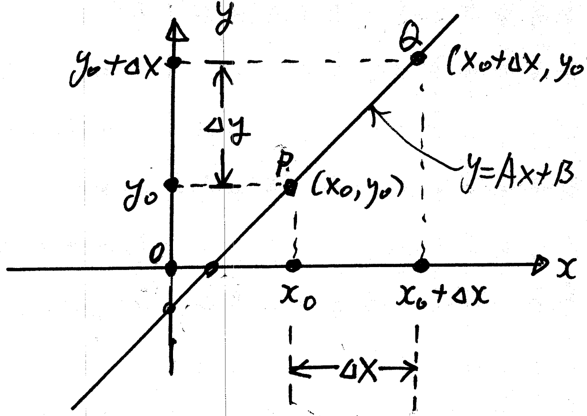
($y=f(x)$ の関数がある時、$f(x)$ が x の単調関数の時のみ、逆関数 $x=g(y)$ は一意的に定義できる。)

$\boxed{y=e^{\ln y} \quad x=\ln(e^x)}$

④ $y=e^x$ は単調増加関数なので($e=2.81828>1$ より)

その逆関数 $g(y)=\log_e(y)=\ln(y)$ が存在する。← (対数関数)

10.06 ① 2点 (x_0, y_0) と $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ を通る直線 $y = AX+B$ を求める。



$$y_0 = Ax_0 + B$$
$$(y_0+\Delta y) = (A)(x_0+\Delta X) + B$$
$$(\Delta y) = (\Delta X)A$$

$A = \left(\frac{\Delta y}{\Delta X}\right)$ となる!!

$y_0 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta X}\right)(x_0) + B$ より

$$A = \left(\frac{\Delta y}{\Delta X}\right);\quad B = y_0 - \left(\frac{\Delta y}{\Delta X}\right)(x_0);$$

すなわち、$\boxed{y = y_0 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta X}\right)(X - X_0)}$ となる!!

② 点 $(1,2)$ と $(3,4)$ を通る直線の式は、

$$\begin{pmatrix}\Delta X = 3-1 = 2\\ \Delta y = 4-2 = 2\end{pmatrix};\quad \frac{\Delta y}{\Delta X} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$y = 2 + (1)(X-1) = 2 + X - 1 \quad y = X+1$$

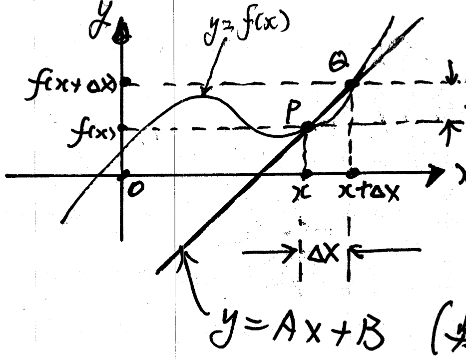
点 $(-7, 4)$ と $(8, -11)$ を通る直線の式は、

$$\begin{pmatrix}\Delta X = 8-(-7) = 15\\ \Delta y = (-11)-(4) = -15\end{pmatrix}\quad \frac{\Delta y}{\Delta X} = \frac{-15}{15} = -1;$$

$$y = 8 + (-1)(x+11) = -x + 8 - 11 = -x-3$$

$$y = -x-3$$

10.07 ① $f'(x) = \lim_{\Delta X \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - (x)}$ を $f(x)$の微分と呼ぶ。



$$y = y_0 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta X}\right)(x - x_0) = Ax + B$$

$y = Ax+B$ (点PとQを通る直線)

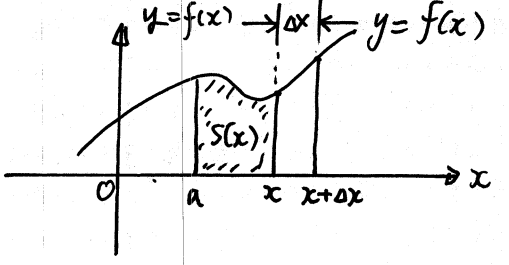
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ となる!!

② $f(x) = ax^n$ の時.

$$f'(x) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{(x+\Delta x) - (x)} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{nax^{n-1}\Delta X + \cdots}{\Delta X} = nax^{n-1}$$

$f'(x) = nax^{n-1}$ となる.

10.08 積分は微分の逆とは?



区間 $[a,x]$ でかこまれた面積を定積分として、

$S(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ と書く。(約束だ!!)

$S(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)\,dx$ とする。

$$S(x+\Delta x)-S(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx \approx f(x)\Delta x \text{ とする。}$$

すなわち $f(x)\approx\dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=S'(x) \Rightarrow$ ($f(x)$ は $S(x)$ の微分である!!)

10.09 ① 今、$f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)$ で定義する。

$$\frac{df(x)}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n)(x^{n-1})}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=f(x) \text{ とする!}$$

$f(x)$ は微分しても、もとの関数のままである。 $\boxed{\dfrac{df(x)}{dx}=f(x)}$

② この関数は単調増加関数なので、逆関数 $g(y)$ が一意的に定義できる。 $x=g(y)=g(f(x))$ でかつ、$y=f(g(y))$ とする。

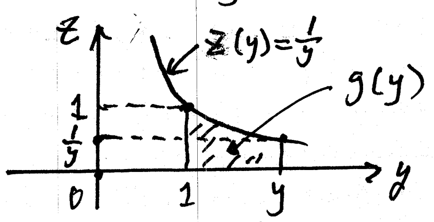
$$1=\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}g(f(x))=\frac{dg(f(x))}{df(x)}\frac{df(x)}{dx}=\left(\frac{dg(f)}{df}\right)=f(x)=f$$

すなわち、$\dfrac{dg(f)}{df}=\dfrac{1}{f}$ とする!!

また、$1=\dfrac{dy}{dy}=\dfrac{d}{dy}f(g(y))=\dfrac{df(g(y))}{dg(y)}\dfrac{dg(y)}{dy}=f(g(y))\dfrac{dg(y)}{dy}$

$y=f(g(y))$ より $1=(y)\dfrac{dg(y)}{dy} \longrightarrow \dfrac{dg(y)}{dy}=\dfrac{1}{y}$ とする!!

③ すなわち、$f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots$ の逆関数 $g(y)$ は、



$g(y)=\int_1^y z(y)\,dy=\int_1^y\dfrac{dy}{y}$

$\dfrac{dg(y)}{dy}=\dfrac{1}{y}$ より $g(y)=\int_{y_0}^{y}\dfrac{dy}{y}$ とする!!

($g(y)$ は関数 $z(y)=\frac{1}{y}$ の区間 $[1,y]$ でかこまれた面積になる…)

④ 実際に $f(x)=e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)$ を指数関数、

$g(x)=\log_e(x)=\int_0^x\dfrac{dx}{x}$ を対数関数と定義する!!