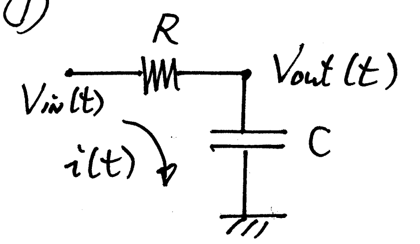
8.09 ①

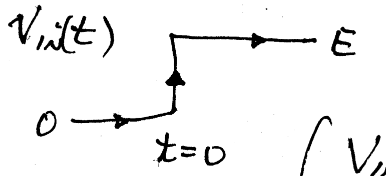


コンデンサー(容量)を充電する時に消費する消費電力は、

$$Power(t) = i(t)\{V_{in}(t) - V_{out}(t)\} \cdots$$

で与えられる。消費されるTotal Energyは、

$$\int_0^{\infty} Power(t)\,dt$$ となる。



($V_{in}(t)$ の値が $t<0$ で $V_{in}(t)=0$
$t \geq 0$ で $V_{in}(t)=E$ の場合、)

最終的に $V_{out}(t) = E$ となり、$i(t) \to 0$ となるが、それ迄には、時間がかかる!実際、$V_{out}(t) = (E)(1-\exp(-t/RC))$ となる。

$$i(t) = \frac{V_{in}(t) - V_{out}(t)}{R} = \left(\frac{E}{R}\right)\exp(-t/RC)$$ で与えられる。

$$(\text{total power loss}) = \int_0^{\infty} Power(t)\,dt = \int_0^{\infty}\left(\frac{E^2}{R}\right)\exp(-2t/RC)\,dt$$

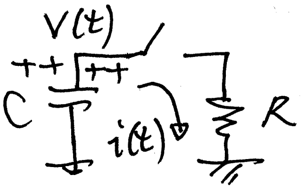
$$\left(\int e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax} + C\right) \qquad = \left(\frac{E^2}{R}\right)\left(\frac{RC}{2}\right) = \frac{CE^2}{2}$$ となる。

(Rが消える!!)

(すなわち、コンデンサー(容量)を充電する時は、必ず、$\frac{CE^2}{2}$ だけの電力を使う事になる!!?)

[このLossは抵抗体R または、発電所からの送電線の抵抗Rにより、発熱する??]

② コンデンサー(容量)が $Q = CE$ の電荷を持っているとする。この電気エネルギーはいくらになるだろうか???? Switchをつけて、抵抗Rを通して、放電するとする。$V(t) = E\exp(-t/RC)$ となる。



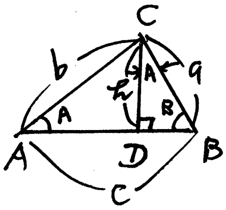
$$Power\ Loss(t) = i(t)V(t) = \frac{1}{R}V^2(t)$$

$$(\text{total energy loss}) = \int_0^{\infty} i(t)v(t)\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^{\infty}\exp(-2t/RC)\,dt$$

$$= \left(\frac{E^2}{R}\right)\left(\frac{RC}{2}\right) = \frac{E^2C}{2}$$ となる。

この抵抗体Rで発散(発熱)されるエネルギー量 $\left(\frac{E^2C}{2}\right)$ は、もともと、容量Cが持っていた電荷 $Q=CE$ の持っていたエネルギーと解釈できる…すなわち、コンデンサー(容量)が持つエネルギーは、$\frac{E^2C}{2}$ となる。電池(容量)を充電するには、半分のエネルギーが原理的に充電時に失うことになる?????…?

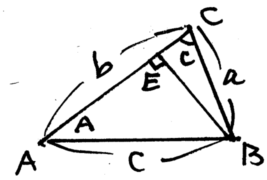
8.01 正弦定理の証明.



$\angle CAD = \angle BCA = \angle A$

$h = CD = b\sin A = a\sin B \rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ —①

同様に、点BからCDに垂線をおろして.



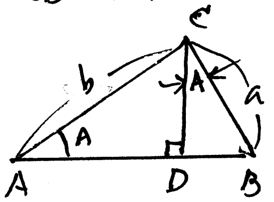
$EB = c\sin A = a\sin C$

すなわち、$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ ②　①と②より $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ となる!

8.02 余弦定理の証明

$BD = AB - AD = c - b\cos A$

$CD = b\sin A$



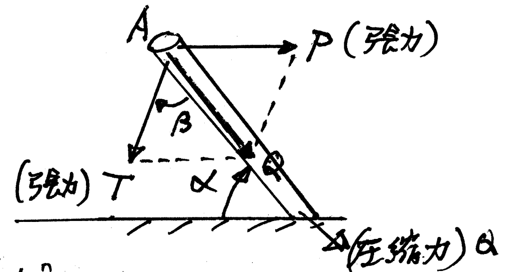
$|BC|^2 = |CD|^2 + |BD|^2$

$a^2 = b^2\sin^2 A + (c - b\cos A)$

$a^2 = b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

同様に
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

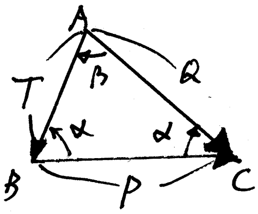
8.03 物体をひっぱる力を張力[kg]という。



電柱を地面に対して α の角度で固定したい。

(地面に水平な方向に張力 P をかける.
電柱に対して β の角度で張力 T をかける.)

張力ベクトル $\vec{T}$ と $\vec{P}$ の合成ベクトル $\vec{Q} = \vec{T} + \vec{P}$ が
丁度電柱と平行になった時張力は電柱に働く圧縮力 $\vec{Q}$ とバランスがとれて. 電柱を固定する事ができる。



$\triangle ABC$ を作ると、
正弦定理により、

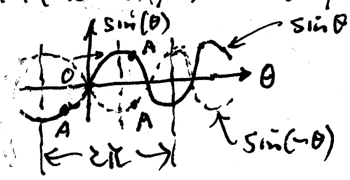
$$\frac{T}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\gamma}$$

$$T = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)P \leftarrow$$

$$Q = \left(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}\right)P \leftarrow$$

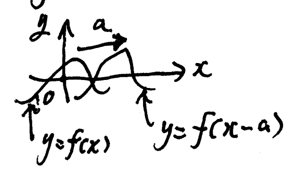
$\sin\gamma = \sin(\pi - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta) \leftarrow \sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$

$$\begin{cases} \sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta) \\ \sin(-\pi-\theta) = \sin(\theta) = \sin(\pi-\theta) \end{cases}$$



$\sin(\pi - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta)$
になる事をしっかり理解しましょう!

($y = f(x)$ のグラフを x 方向に a だけ off-set した graph は、$y = f(x-a)$ となる!!)



8.04 加法定理を導く(Eulerの公式を使う)

$$\begin{cases} \exp(\alpha j) = \cos\alpha + j\sin\alpha \\ \exp(\beta j) = \cos\beta + j\sin\beta \end{cases} \rightarrow \exp(\alpha j)\exp(\beta j) = \exp((\alpha+\beta)j) = \cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta)$$

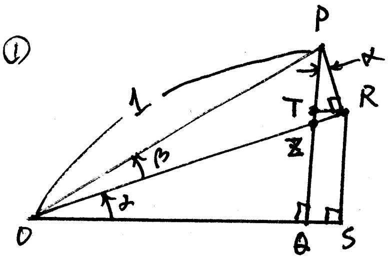
$$= \{\cos\alpha + j\sin\alpha\}\{\cos\beta + j\sin\beta\}$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + j(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

従って.
$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

8.05 ①



OP = 1 とすると. $PQ = \sin(\alpha+\beta) = PT + TQ = PT + RS$

$PT = PR\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha$

$RS = OR\sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha$

すなわち. $\underline{\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}$ ←

② $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ より. $\underline{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

③ また. $OQ = \cos(\alpha+\beta) = OS - QS$; $\left(\begin{array}{l} OS = OR\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha \\ QS = TR = PR\sin\alpha = \sin\beta\sin\alpha \end{array} \right)$

$\underline{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

④ $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\left(\begin{array}{l} x = \frac{1+y}{1-y} \text{ の解} \\ (1-y)x = 1+y \\ x-1 = (x+1)y \end{array} \right)$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$;

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(2\alpha) = \left(\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2\alpha}\right)$; $\tan^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

8.06 ① 75°の正弦の値 $75^\circ = (5)(15^\circ) = (5)\left(\frac{180^\circ}{12}\right) = \frac{5}{12}\pi = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\pi$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$\sin(75^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ←

② 75°の余弦の値

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$\cos(75^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ←

③ $120^\circ = (90^\circ+30^\circ)$ の正弦の値 $120^\circ = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ $\left(\sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6} = (1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (0)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ←

④ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = (0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ ←

$\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$

⑤ $240^\circ = \pi + \frac{\pi}{3}$ の正弦の値

$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\pi\cos\frac{\pi}{3} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{3} = (0)\left(\frac{1}{2}\right) - (1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(240^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ←

⑥ 240°の余弦の値 $\cos(240^\circ) = -\frac{1}{2}$ ←

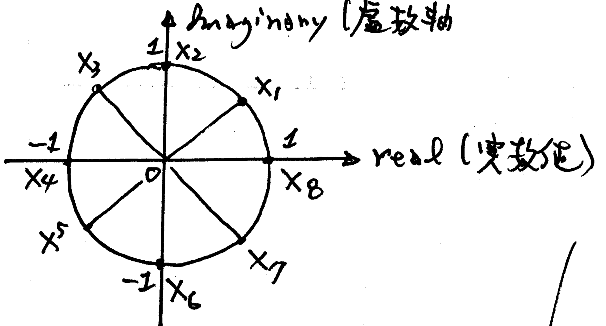
$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{3} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{3} = (-1)\left(\frac{1}{2}\right) - (0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ ←

8.07 $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ より. $\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$ 同様に $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$ $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$ となる.

8.08 ① $X^n = 1$ の根は　$X_k = \exp\left(\frac{2k\pi}{n} j\right)$ で与えられる!
$(k = 1, 2, \cdots, n)$



(複素数平面で半径1の円を描くと、その円周に n 個の根が等角度間隔で並ぶ)

たとえば $n=8$ の時は、$x^8 = 1$ の根は、

$$\left(\begin{array}{ll} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j) & x_2 = j \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+j) & x_4 = -1 \\ x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-j) & x_6 = -j \\ x_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j) & x_8 = 1 \end{array}\right)$$ となる。

② $X^n = a + jb$ の時は、　$a + jb = \sqrt{a^2+b^2}\exp(\theta j)$ の形にする。

$a + jb = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta + j\sin\theta)$ より、$\left(\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\end{array}\right)$

$$X_k = (a^2+b^2)^{\left(\frac{1}{2n}\right)} \exp\left(\frac{2k\pi + \theta}{n} j\right)$$ となる!!

$(X_k)^n = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \exp((2k\pi + \theta) j) = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \exp(\theta j) = a + bj$ となる!

③ $n = 2$ の時は、

$$X_k = (a^2+b^2)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2k\pi + \theta}{2} j\right) \quad (k = 1, 2)$$ となる。

$X_1 = (a^2+b^2)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) j\right) = (a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) + j\sin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)\right]$

$X_1 = -(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$X_2 = (a^2+b^2)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\left(2\pi + \frac{\theta}{2}\right) j\right) = (a^2+b^2)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{\theta}{2} j\right) = (a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\theta}{2}\right)$

すなわち、$X_1 = -X_2$ となる。

$n = 2$ の時　$X^2 = a + jb$ の根は、

$\left(\begin{array}{ll}\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}, & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}},\end{array}\right)$

$$X = \pm(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{\frac{1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{2}} \pm j\sqrt{\frac{1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{2}}\right)$$

$$X = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} + a} \pm j\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} - a}\right)$$

この式を2乗すると、$X^2 = \frac{1}{2}\left((\sqrt{a^2+b^2} + a) - (a^2+b^2-a) \pm (2j)\sqrt{(a^2+b^2) - a^2}\right)$

$X^2 = a \pm j|b|$ となる!!

すなわち、$\left(\begin{array}{ll} b < 0 \text{ の時、} & X = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} + a} - j\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} - a}\right) \\ b \geqq 0 \text{ の時} & X = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} + a} + j\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} - a}\right)\end{array}\right)$ となる!!