4.01 xとyについての連立方程式の例（2元1次連立方程式）

$$\begin{pmatrix} 5x+y=7 \\ 5x+3y=1 \end{pmatrix} \qquad 5x = 7-y = 1-3y$$

$$6 = -2y$$

$$y=-3,\ 5x = 7-(-3) = 10,\ x=2 \qquad (x,y)=(2,-3)$$ となる.

4.02 加減法（消去法）とは、
たとえば xとyを未知数とする時、yを含まないxだけの式の形にする事を言う。

$$\begin{pmatrix} 5x+y=7 \\ 5x+3y=1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 15x+3y=21 \\ -)\ \ 5x+3y=1 \\ \hline 10x=20 \end{array} \rightarrow x=2$$

次に $5x+y=7$ より
$y=7-5x=7-10=-3$
$(x,y)=(2,-3)$ となる.

4.03 代入法とは、1つの方程式からyをxで表す方程式を作る。
それを他の方程式に代入して、yを消去して、xだけにする。

$$\begin{pmatrix} 5x+y=7 \\ 5x+3y=1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y=7-5x \\ 5x+(3)(7-5x)=1 \end{pmatrix} \qquad 5x+21-15x=1 \qquad 20=10x\ ;\ x=2$$

$y=7-5x$
$y=7-10=-3$
$(x,y)=(2,-3)$ となる.

4.04 等置法とは、2つの方程式からyをxで表わす方程式を作り、
その2つの方程式の右辺を等しいとおいて、yを消去して、xについて解く。

$$\begin{pmatrix} 5x+y=7 \\ 5x+3y=1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y=7-5x \\ y=\frac{1-5x}{3} \end{pmatrix} \rightarrow 7-5x=\frac{1-5x}{3} \rightarrow \left(21-15x=1-5x \rightarrow 20=10x\right) \quad x=2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} y=7-5x=7-10 \\ y=-3 \\ \text{として定まる} \end{pmatrix}$$

4.05 いずれにせよ、それ程区別する程の差はない!! どうでも良い!!
自分が簡単だと思うやり方でよい! 名称はあるが、どうでも良い!!
ただし、Computerで計算する時は話がちがう!! 行列式 A[][]の概念を導入する。

$$A[\,][\,]=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad X[\,]=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad B[\,]=\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$ と定義する.

$A[\,][\,]\,X[\,]=B[\,]$ と書く!

$$\begin{pmatrix} A[1][1]=5 \\ A[1][2]=1 \\ A[2][1]=5 \\ A[2][2]=3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X[1]=x \\ X[2]=y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B[1]=7 \\ B[2]=1 \end{pmatrix}$$ とする.

$B[\,]=\vec{B}$ と $X[\,]=\vec{X}$ はベクトル
A[][] は 2×2 の行列式である。

行列式の逆行列式 invA[][] の定義. invA[][] A[][] = U[][] とする行列式のこと.
ただし. $U[\,][\,]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$（単位行列式という.）

$$A[\,][\,]=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ の時 } \quad invA[\,][\,]=\frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$ で与えられる.

ここで $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=(ad-bc)$（行列式の値）

$$invA[\,][\,]\,A[\,][\,]=\frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}}{(ad-bc)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=U[\,][\,]$$ となっている...

4.06

$$A(x)/a = B(x)/b + C(y)/c \qquad\qquad (x-2)/5 = (10-x)/3 + (y-5)/4$$
$$D(y)/d = E(x)/e + F(x,y)/f \quad \Rightarrow \quad (2y+14)/3 = (x+13)/4 + (2x+y+5)/8$$

(5, 3, 4) の最小公倍数 = 60 $\Rightarrow$ $12(x-2) = 20(10-x) + 15(y-5)$

(3, 4, 8) の最小公倍数 = 24 $\Rightarrow$ $8(2y+14) = 6(x+13) + 3(2x+y+5)$

$$\begin{pmatrix} 12x-24 = 200-20x+15y-75 \\ 16y+112 = 6x+78+6x+3y+15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 32x-15y=149 \\ 12x-13y=19 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32 & -15 \\ 12 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 149 \\ 19 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow A[\,][\,]X[\,]=B[\,]$$

$$X[\,] = \mathrm{inv}\,A[\,][\,]\,B[\,] = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} de-bf \\ af-ce \end{pmatrix}}{(ad-bc)}$$

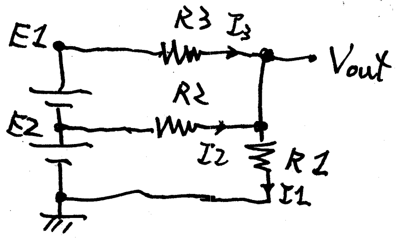
$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad-bc = (32)(-13) - (-15)(12) = -416+180 = -236$$

$$\begin{cases} de-bf = (-13)(149) - (-15)(19) = -1937+285 = -1652 \\ af-ce = (32)(19) - (12)(149) = 608-1788 = -1180 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x = \dfrac{1652}{236} = 7 \leftarrow \\ y = \dfrac{1180}{236} = 5 \leftarrow \end{pmatrix}$$

4.07 一般に $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ の時 $x = \dfrac{\det\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ $y = \dfrac{\det\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ となっている

$\begin{pmatrix} 5x+y=7 \\ 5x+3y=1 \end{pmatrix}$ の時 $x = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} = \dfrac{21-1}{15-5} = \dfrac{20}{10} = 2$ $\quad y = \dfrac{\det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} = \dfrac{5-35}{10} = -3$ となる!!

4.08 define EERRR( ) { input E1, E2 ; output Vout ; [E2][Vout] R2(1) ;
[E1][Vout] R3(1) ; [Vout] [0] R1(1) ; }



$$\begin{pmatrix} E1 = 4E\ ;\ E2 = 3E\ ; \\ R1 = 3R\ ;\ R2 = 2R\ ;\ R3 = 3R\ ; \end{pmatrix}$$

$$I1 = \frac{Vout}{R1} = \frac{E1-Vout}{R3} + \frac{E2-Vout}{R2} = I_3 + I_2$$

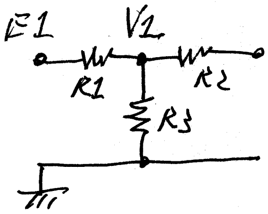
$$Vout\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right) = \left(\frac{E1}{R3} + \frac{E2}{R2}\right)\ ;\quad I_2 = \frac{E2-Vout}{R2}\ ;\ I_3 = \frac{E1-Vout}{R3}\ ;$$

$$I_2 = \frac{E2}{R2} - \frac{1}{R2}\left(\frac{E1}{R3} + \frac{E2}{R2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right)$$

$$I_2 = \left(\frac{E}{R}\right)\left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right)\right\} \Big/ \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right\} = \left(\frac{E}{R}\right)\left[\frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(8+9)}{(2+3+2)}\right]$$

$$I_2 = \left(\frac{E}{R}\right)\left[\frac{3}{2} - \frac{17}{14}\right] = \left(\frac{21-17}{14}\right)\left(\frac{E}{R}\right) = \left(\frac{4}{14}\right)\left(\frac{E}{R}\right) = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{E}{R}\right) \leftarrow$$

4.09



define EERRR( ) { input E1, E2; output V1;
[E1][V1] R1( ); [E2][V1] R2( );
[V1][0] R3( ); }
(R1 = 2Ω; R2 = 2Ω; R3 = 5Ω; E1 = 44 V; E2 = 52 V;)

$$I1 = \frac{E1-V1}{R1}; \quad I2 = \frac{E2-V1}{R2}; \quad I3 = \frac{V1}{R3} = I1+I2 = \frac{E1-V1}{R1} + \frac{E2-V1}{R2}$$

$$(V1)\left(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}\right) = \frac{E1}{R1}+\frac{E2}{R2} \quad ; (V1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{44}{2}+\frac{52}{2}\right)$$

$$(V1)\left(\frac{12}{10}\right) = (22+26) = (48) \qquad V1 = 40 \text{ volt.}$$

$$(\text{Total Power}) = (I1)(E1-V1) + (I2)(E2-V1) + (I3)(V1)$$

$$= \frac{(E1-V1)^2}{R1} + \frac{(E2-V1)^2}{R2} + \frac{(V1)^2}{R3}$$

$$= \frac{(44-40)^2}{2} + \frac{(52-40)^2}{2} + \frac{(40)^2}{5} = \frac{16}{2} + \frac{144}{2} + \frac{1600}{5} = 8+72+320 = 400$$

Watt

(副解)

$$E1 = (R1)(I1) + (R3)(I1+I2)$$
$$E2 = (R2)(I2) + (R3)(I1+I2)$$

$$\left(\begin{array}{l} (R1+R3)\, I1 + R3\, I2 = E1 \\ (R3)\, I1 + (R2+R3)\, I2 = E2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} (2+5)\, i1 + (5)\, i2 = 44 \\ (5)\, i1 + (2+5)\, i2 = 52 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i1 \\ i2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$$

$$i_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 44 & 5 \\ 52 & 7 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}} = \frac{308-260}{49-25} = \frac{48}{24} = 2; \quad i_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 7 & 44 \\ 5 & 52 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}} = \frac{364-220}{24} = \frac{144}{24} = 6$$

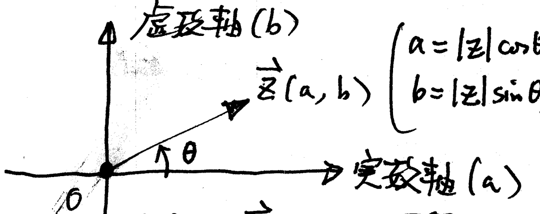
$$(\text{Total Power}) = (I_1)^2 R_1 + (I_2)^2 R_2 + (I_1+I_2)^2 R_3$$

$$= (2)^2(2) + (6)^2(2) + (2+6)^2(5)$$

$$= 8 + 72 + 320 = 400 \text{ (Watt)} \longleftarrow$$

4.10 複素数 $a+bj$ は $z[\,] = (a, b)$ として、ベクトルとも解釈できる。

複素数平面の矢 $\vec{z} = (a, b)$ は原点から $|\vec{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$ の距離にある。



$$\begin{pmatrix} a = |z|\cos\theta \\ b = |z|\sin\theta \end{pmatrix}$$

(これ、複素数 $(a+jb)$ と $(c+jd)$ のかけ算は、複素数平面での矢の回転に対応する!!)

今、$\begin{pmatrix} c = |w|\cos\phi \\ d = |w|\sin\phi \end{pmatrix}$ とすると。 $\vec{p} = (\vec{z})(\vec{w})$ とすると。

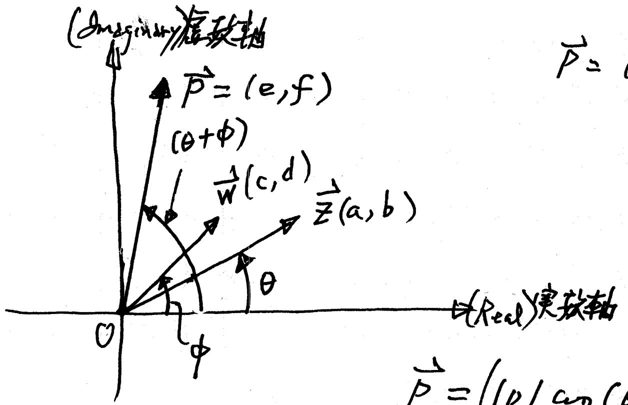
$\vec{p} = (a+jb)(c+jd)$

$\vec{p} = (ac-bd) + (bc+ad)j$

とする。

同様に $|\vec{W}| = \sqrt{c^2+d^2}$ とする。

$$\begin{pmatrix} w[\,] = \vec{w} = (c, d) = c+jd \\ z[\,] = \vec{z} = (a, b) = a+jb \end{pmatrix}$$



$\vec{P}=(\vec{z})(\vec{w})=(a+jb)(c+jd)$

$\vec{P}=(ac-bd)+(bc+ad)j$

$\vec{P}=(e,f)\ ;\ \begin{pmatrix} e=ac-bd \\ f=bc+ad \end{pmatrix}$

$|\vec{P}|=\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}$

$\vec{P}=\left(|p|\cos(\theta+\phi),\ |p|\sin(\theta+\phi)\right)$ となっている!!

また $|\vec{p}|=|\vec{z}||\vec{w}|$ となっている!!!

4.11 $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ $\left(|p|=|z||w| とも書く.\right)$

右辺 $=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$ たしかに、(左辺)=(右辺) となっている!!

左辺 $=a^2c^2+b^2d^2-2acbd+b^2c^2+a^2d^2+2bcad=$ 右辺 となっている!!

4.12 $(\vec{p})=(\vec{z})(\vec{w})$ をそのまま書き出すと、

$|\vec{p}|\left(\cos(\theta+\phi),\ \sin(\theta+\phi)\right)=(ac-bd,\ bc+ad)$ となる。

$\begin{pmatrix} a=|\vec{z}|\cos\theta \\ b=|\vec{z}|\sin\theta \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ (右辺) $=|\vec{z}||\vec{w}|\big(\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi,$

$\begin{pmatrix} c=|\vec{w}|\cos\phi \\ d=|\vec{w}|\sin\phi \end{pmatrix}$ $\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi\big)$

〈三角形の加法定理〉

すなわち. $\begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi)=\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi \\ \sin(\theta+\phi)=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi \end{pmatrix}$ の関係を得る!!

4.13. 今、$\vec{z}=(\sqrt{3},1)=(2\cos 30^\circ, 2\sin 30^\circ)$

$\vec{w}=(1,1)=(\sqrt{2}\cos 45^\circ, \sqrt{2}\sin 45^\circ)$ とすると、

$\vec{p}=(\sqrt{3},1)(1,1)=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)=(2\sqrt{2})(\cos 75^\circ, \sin 75^\circ)$ となる。

すなわち $\left(\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\ \sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)$ を得る!!

実際に複素数平面で $(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$ の点を描き、x軸となす角度を計ると 75° となる!!

$\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1=0.73205 \\ \sqrt{3}+1=2.73205 \end{pmatrix}$

4.14 複素数 $\vec{z}=z[\,]=(a,b)$ はまた、2×2 の行列式 $\vec{z}=z[\,][\,]=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ に対応する。

今、$1=1[\,][\,]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $J=J[\,][\,]=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると、$J^2=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

すなわち、$J^2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=-1[\,][\,]$ となる。

$\vec{z}=z[\,]=z[\,][\,]=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=(a)(1)+(b)(j)=a+bj$

とも表現できる!!